2.26) Busco el núcleo:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x+3y-z=0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F2 \to F1+F2 \\ F3 \to F1-F3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} F3 \to F2+F3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x+y-z=0 \to x=z \\ 2y=0 \to y=0 \end{matrix}$$

$\bar{x}$ que cumplen $\to$ $\bar{x}=(z,0,z)=z\cdot(1,0,1)$

Entonces $B_{Nu}=\{(1,0,1)\}$

Busco imagen:

$T([1\ 0\ 0]^T)=[1\ -1\ 1]^T$, $T([0\ 1\ 0]^T)=[1\ 1\ 3]^T$, $T([0\ 0\ 1]^T)=[-1\ 1\ -1]^T$

$Im=\text{gen}\{[1\ -1\ 1]^T,[1\ 1\ 3]^T,[-1\ 1\ -1]^T\}$ donde la primera y tercera comp. son múltiplos, entonces:

$B_{Im}=\{[1\ -1\ 1]^T,[1\ 1\ 3]^T\}$

Tomo entonces $S_2=B_{Nu}=\text{gen}\{(1,0,1)\}$

$S_1=B_{Im}=\text{gen}\{(1,-1,1),(1,1,3)\}$

Como es una proyección, los vectores de S_1 los deja iguales y los de S_2 los manda al 0. Tomo ~~[illegible]~~ $B = \{(1,-1,1),(1,1,3),(1,0,1)\}$ uniendo los gen.

$\rightarrow$ ~~$\Pi_{S_1S_2}(1,0,1) = (1,0,1)$~~

~~$\Pi_{S_1S_2}(1,-1,1)$~~

$$\begin{cases} \Pi_{S_1S_2}(1,-1,1) = (1,-1,1) \\ \Pi_{S_1S_2}(1,1,3) = (1,1,3) \\ \Pi_{S_1S_2}(1,0,1) = (0,0,0) \end{cases}$$

Un v cualquiera de $\mathbb{R}^3$ puede expresarse como:

$$v = \alpha_1 \cdot [1\ -1\ 1]^T + \alpha_2 \cdot [1\ 1\ 3]^T + \alpha_3 \cdot [1\ 0\ 1]^T$$

en donde:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = x \to \alpha_3 = x-2\alpha_1 - y \to \alpha_3 = x-y-z+2y+x \to \boxed{\alpha_3 = 2x+y-z} \\ -\alpha_1+\alpha_2 = y \to \alpha_2 = y+\alpha_1 \to \boxed{\alpha_2 = \frac{z}{2}-\frac{x}{2}} \\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 = z \to \alpha_1 + 3y + 3\alpha_1 + x - 2\alpha_1 - y = z \end{cases}$$

$$\to 2\alpha_1 = z - 2y - x \to \boxed{\alpha_1 = \frac{z}{2} - \cancel{\frac{2y}{2}} - \frac{x}{2}}$$

aplico $\Pi_{S_1S_2}$ en ambos lados y uso prop. de TL:

$$\Pi_{S_1S_2}(v) = \alpha_1 . \Pi_{S_1S_2}([1\ -1\ 1]^T) + \alpha_2 . \Pi_{S_1S_2}([1\ 1\ 3]^T) + \alpha_3 . \underbrace{\Pi_{S_1S_2}([1\ 0\ 1]^T)}_{[0\ 0\ 0]^T} \to$$

$\to$ uso los valores hallados de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\Pi_{S_1S_2}(v) = \left(\frac{z}{2} - y - \frac{x}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{z}{2} - \frac{x}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to \Pi_{S_1S_2}(v) = \begin{bmatrix} -x-y+z \\ y \\ -2x-y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde $\boxed{[\Pi_{S_1S_2}]_E^E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$